

2021





تصميم محمود عوض
معلم رياضيات



تصميم محمود عوض
معلم رياضيات

إعداد وتصميم



معلم أول رياضيات



01202560239







◆ الوحدة الأولى : المعادلات

◆ الوحدة الثانية : الكسور الجبرية

◆ الوحدة الثالثة : الإحصاء



التحليل بإخراج العامل المشترك

- س^{2} – ٤ س = س (س – ٤)
- ٣س – ١٥ = ٣ (س – ٥)
- ٤ص + ٢٤ = ٤ (ص + ٦)
- س^{4} – س = س (س^{3} – ١)
- ٢س^{3} + ٦س = ٢س (س^{2} +٣)
- س^{3} – س^{2} + س = س (س^{2} – س + ١)

- س^{2} – ٢س = ...
- س^{2} – س = ...
- ٢س - ٦ = ...
- س^{3} – س^{2} = ...
- ٢س^{3} – ١٨س = ...
- س^{4} + س^{3} + س^{2} = ...

الفرق بين مربعين

أعداد لها جذور تربيعية مثل:
١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ٢٥ ، ٣٦ ، ٤٩

هو عبارة عن حدين لهما جذور تربيعية وبينهم (–) مثل : س^{2} – ٢٥ ولو لقيت بينهم (+) ملوش تحليل

تحليل الفرق بين مربعين = (√الأول – √الثانى) (√الأول + √الثانى)

- س^{2} – ٤ = (س – ٢) (س + ٢)
- س^{2} – ١ = (س – ١) (س + ١)
- ٤س^{2} – ٩ = (٢س – ٣) (٢س + ٣)
- ص^{2} – ٨١ = (ص – ٩) (ص + ٩)

- س^{2} – ٩ = ...
- س^{2} – ١٦ = ...
- س^{2} – ٣٦ = ...
- ص^{2} – ٢٥ = ...

مجموع مكعبين والفرق بينهما

الأعداد التي لها جذور تكعيبية مثل:
١ ، ٨ ، ٢٧ ، ٦٤ ، ١٢٥

- س^{3} – ١ = (س – ١) (س^{2} + س +١)
- س^{3} + ١ = (س + ١) (س^{2} – س +١)

- س^{3} – ٢٧ = ...
- س^{3} + ٨ = ...

تحليل المقدار الثلاثى البسيط س^{2}+ ب س+ جـ

قاعدة الإشارات: إذا كانت إشارة الأخير (+) يبقى الإشارتين زى إشارة الأوسط

إذا كانت إشارة الأخير (-) يبقى الإشارتين مختلفتين والرقم الأكبر ياخد إشارة الأوسط

- س^{2} +٥س +٦ = (س + ٢) (س + ٣)
- س^{2} – ٣س +٢ = (س – ٢) (س – ١)
- س^{2} + س – ١٢ = (س + ٤) (س – ٣)
- س^{2} – ٢س – ١٥ = (س – ٥) (س + ٣)

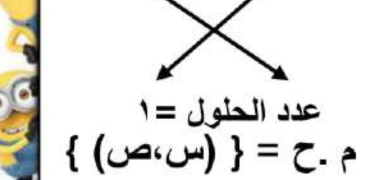
- س^{2} +٤س +٤ = ...
- س^{2} – ٦س +٩ = ...
- س^{2} + س –٦ = ...
- س^{2} – س + ١ = ...



1 الدرس الأول: حل معادلتين من الدرجة الأولى في متغيرين

إذا كان المعادلتين على الصورة : أ١ س + ب١ ص = جـ١ ، أ٢ س + ب٢ ص = جـ٢ فإن :

لهما حل وحيد	لهما عدد لا نهائى	ليس لهما حلول
إذا كان $\frac{أ_1}{أ_2} \neq \frac{ب_1}{ب_2}$	إذا كان $\frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} = \frac{جـ_1}{جـ_2}$	إذا كان $\frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} \neq \frac{جـ_1}{جـ_2}$
أو: المستقيمان متقاطعان	أو المستقيمان منطبقان	أو المستقيمان متوازيان
عدد الحلول = ١	م.ح = { (س،ص): اكتب أي معادلة من الاثنين }	م. ح = Φ
م .ح = { (س،ص) }		عدد الحلول = ٠





الحل الجبرى بطريقة الحذف

١. اجعل المعادلتين على الصورة أ س + ب ص = جـ (*الحد المطلق لوحده بعد =*)
٢. خلى معاملات السينات متشابهة أو معاملات الصادات متشابهة (*بضرب المعادلة كلها في رقم*)
٣. اكتب المعادلتين في صورة أفقية تحت بعض (*اتأكد ان السينات تحت بعض والصادات تحت بعض وهكذا*)
٤. لو المتشابهين ليهم نفس الإشارة أطرح المعادلتين ولو إشاراتهم مختلفة اجمع المعادلتين.
٥. هات قيمة المجهول وعوّض عنها في أي معادلة هتجيلك قيمة المجهول التانى.

الحل الجبرى بطريقة التعويض

١. من إحدى المعادلتين هات قيمة ص بدلالة س أو قيمة س بدلالة ص
٢. عوّض في المعادلة الثانية بالقيمة اللى جبتها
٣. فك الأقواس واجمع المتشابه
٤. احسب قيمة المجهول وعوّض بيها في أي معادلة هتجيلك قيمة المجهول الثانى

مثال على طريقة التعويض: حل المعادلتين س + ص = ٤ ، س + ٢ص = ٥

الحل ص = ٤ − س بالتعويض في الثانية ∴ س + ٢ (٤ − س) = ٥ س + ٨ − ٢س = ٥

− س = −٣ ∴ س = ٣ بالتعويض في الأولى ∴ ص = ٤ − ٣ = ١ م.ح = { (٣ ، ١) }



١ أوجد مجموعة حل المعادلتين :

٢س ـ ص = ٣ ، س + ٢ص = ٤

الحل

بضرب المعادلة الأولى × ٢

٤س ـ ٢ص = ٦
س + ٢ص = ٤ (+) بالجمع

٥س = ١٠

∴ س = ٢ بالتعويض في المعادلة الثانية

٢ + ٢ص = ٤ ⟸ ٢ص = ٢ ⟸ ص = ١

م . ح = { (٢ ، ١) }

٢ أوجد مجموعة حل المعادلتين :

٣س + ٤ص = ٢٤ ، س ـ ٢ص + ٢ = ٠

الحل نظبط شكل المعادلة الثانية : س ـ ٢ص = ـ٢

بضرب المعادلة الثانية × ٣

٣س ـ ٦ص = ـ٦
٣س + ٤ص = ٢٤ (ـ) بالطرح

ـ١٠ص = ـ٣٠

∴ ص = ٣ بالتعويض في المعادلة الثانية

س ـ ٢×٣ +٢ = ٠ ⟸ س ـ ٤ = ٠ ∴ س = ٤

م . ح = { (٤ ، ٣) }

ملحوظة

لما تطرح إطرح الرقمين بإشارتهم : يعنى مثلا في مثال ٢ هتقول : ـ٦ ـ ٤
نفس الكلام في الجمع ،، خلاصة الكلام اتعامل مع الأرقام بإشاراتها

٣ أوجد قيمتى أ ،ب علمًا بأن (٣، ـ١) حلا للمعادلتين:

أ س + ب ص ـ ٥ = ٠ ، ٣أ س + ب ص = ١٧

الحل

∵ (٣ ، ـ١) حل للمعادلة أ س + ب ص ـ ٥ = ٠

نعوض عن س = ٣ ، ص = ـ١

∴ أ×٣ +ب×ـ١ ـ ٥ = ٠ ∴ ٣أ ـ ب = ٥ ⟵ (١)

∵ (٣ ، ـ١) حل للمعادلة ٣أ س + ب ص = ١٧

نعوض عن س = ٣ ، ص = ـ١

٣أ×٣ + ب×ـ١ = ١٧ ∴ ٩أ ـ ب = ١٧ ⟵ (٢)

٩أ ـ ب = ١٧
٣أ ـ ب = ٥ (ـ) بالطرح

٦أ = ١٢

∴ أ = ٢ بالتعويض في ١

∴ ٣×٢ ـ ب =٥

∴ ٦ ـ ب =٥ ∴ ب = ١

٤ مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٤ سم ، فإذا كان محيط المستطيل ٢٨ سم فأوجد مساحته.

الحل

نفرض أن الطول = س والعرض = ص

∵الطول يزيد عن العرض ∴ الطول ـ العرض = الزيادة

∴ س ـ ص = ٤

∵ المحيط = ٢٨ ، ∵محيط المستطيل = ٢ (الطول+العرض)

∴ ٢ (س + ص) = ٢٨ بالقسمة على ٢

∴ س + ص = ١٤

س ـ ص = ٤
س + ص = ١٤ (+) بالجمع

٢ س = ١٨ ∴ س = ٩

بالتعويض في س ـ ص = ٤

∴ ٩ ـ ص = ٤ ∴ ص = ٥

المساحة = الطول × العرض = ٩ × ٥ = ٤٥ سم^2

١ أوجد في ح×ح مجموعة حل المعادلتين :

س + ٣ص = ٧ ، ٥س ـ ص = ٣

الحل

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

٢ أوجد في ح×ح مجموعة حل المعادلتين :

٣س + ٤ص = ١١ ، ٢س + ص ـ ٤ = ٠

الحل

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

الحل البيانى

◆ مجموعة حل معادلتين من الدرجة الأولى بيانيا هي: نقطة تقاطع المستقيمين

◆ إذا توازى المستقيمان فإن م . ح = Φ

◆ إذا انطبق المستقيمان فإن مجموعة الحل هي: {(س ، ص) : واكتب أي معادلة من الاتنين }

١ أوجد في ح × ح مجموعة حل المعادلتين بيانيا :

ص = س + ٤ ، س + ص = ٤

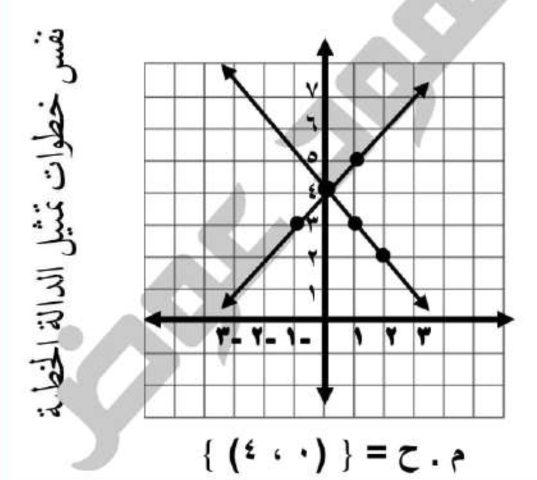
الحل

ص = س + ٤

س	-١	٠	١
ص	٣	٤	٥

ص = ٤ ـ س

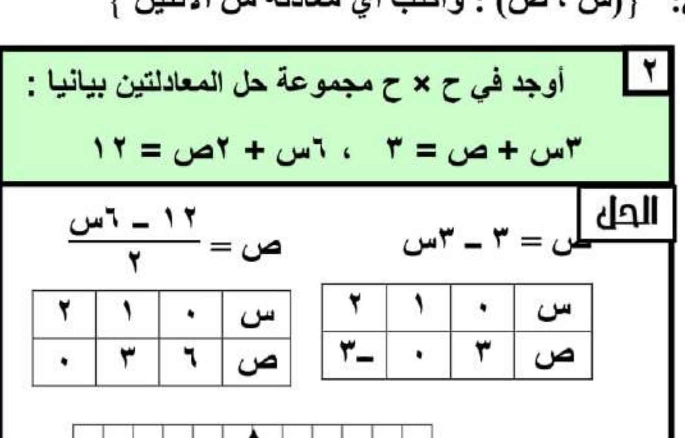
س	٠	١	٢
ص	٤	٣	٢



م . ح = { (٠ ، ٤) }

٢ أوجد في ح × ح مجموعة حل المعادلتين بيانيا :

٣س + ص = ٣ ، ٦س + ٢ص = ١٢



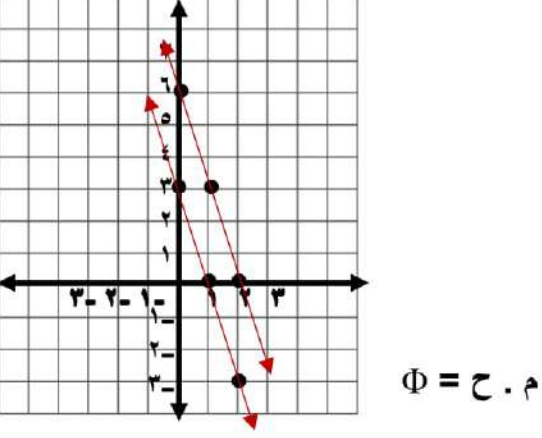
الحل

ص = ٣ ـ ٣س

س	٠	١	٢
ص	٣	٠	-٣

ص = $\frac{١٢ - ٦س}{٢}$

س	٠	١	٢
ص	٦	٣	٠



م . ح = Φ







اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) نقطة تقاطع المستقيمان ص = ٢ ، س + ص = ٦ هي ....

أ) (٢ ، ٦) ب) (٢ ، ٤) جـ) (٤ ، ٢) د) (٦ ، ٢)

(٢) مجموعة حل المعادلتين س ـ ٢ص = ١ ، ٣س + ص = ١٠ هي ....

أ) { (٥ ، ٢) } ب) { (٢ ، ٤) } جـ) { (١ ، ٣) } د) { (٣ ، ١) }

(٣) عدد حلول المعادلتين س + ص = ٢ ، ص + س = ٣ هو ....

أ) صفر ب) ١ جـ) ٢ د) ٣

الحل $\frac{أ_١}{أ_٢} = ١$ ، $\frac{ب_١}{ب_٢} = ١$ ، $\frac{جـ_١}{جـ_٢} = \frac{٢}{٣}$ ∵ $\frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢} \neq \frac{جـ_١}{جـ_٢}$ ∴ عدد الحلول = صفر أى : م.ح = Φ

(٤) إذا كان للمعادلتين س + ٤ص = ٧ ، ٣س + ك ص = ٢١ عدد لا نهائي من الحلول فإن ك =.......

أ) ٤ ب) ٧ جـ) ١٢ د) ٢١

الحل ∵ للمعادلتين عدد لا نهائي من الحلول ∴ $\frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢} = \frac{جـ_١}{جـ_٢}$ ∴ $\frac{١}{٣} = \frac{٤}{ك}$ (مقص) ∴ ك = ١٢

(٥) إذا كان للمعادلتين س + ٢ص = ١ ، ٢س + ك ص = ٢ حل وحيد فإن ك لا يمكن أن تساوى .....

أ) ١ ب) ٢ جـ) ٣ د) ٤

الحل $\frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢}$ ∴ $\frac{١}{٢} = \frac{٢}{ك}$ (مقص) ∵ للمعادلتين حل وحيد ∴ ك لا يمكن أن تساوى ٤

(٦) المستقيمان ٣س + ٥ص = صفر ، ٥س ـ ٣ص = صفر يتقاطعان فى ....

أ) الربع الأول ب) الربع الثانى جـ) نقطة الأصل د) الربع الثالث

(٧) إذا كان المستقيمان س + ٣ص = ٤ ، س + أ ص = ٧ متوازيين فإن أ = ...

أ) ٢ ب) ٣ جـ) ٤ د) ٧

---

(١) أوجد في ح × ح مجموعة حل المعادلتين ٢س + ص = ١ ، س + ٢ص = ٥

(٢) أوجد في ح^٢ مجموعة حل المعادلتين س + ٢ ص = ٨ ، ٣ س + ص = ٩

(٣) أوجد في ح × ح مجموعة حل المعادلتين ص = ١ ـ ٢س ، س + ٢ص = ٥

(٤) أوجد في ح × ح مجموعة حل المعادلتين س = ص + ٤ ، ٣ س + ٢ص = ٧

(٤) زاويتان حادتان في مثلث قائم الزاوية الفرق بين قياسيهما ٥٠ ، أوجد قياسهما

(٥) مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٣ سم فإذا كان محيطه ٢٢ سم فأوجد مساحته.

(٦) أوجد بيانيا مجموعة حل المعادلتين ص = ٢س - ٣ ، س + ٢ص = ٤



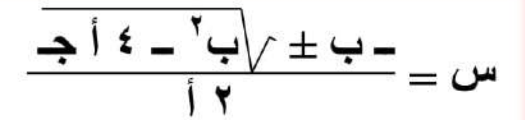
الدرس الثانى 2

حل معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد

إذا كانت المعادلة على الصورة : أ $س^2$ + ب س + جـ = ٠ هنستخدم القانون العام:

القانون العام





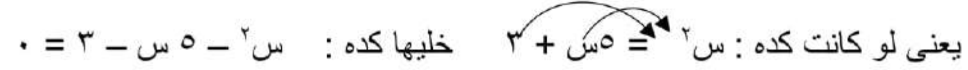
$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$$



أ : معامل $س^2$
ب: معامل س
جـ : الحد المطلق

خطوات حل المعادلة :

١ **خلى المعادلة على الصورة أ س + ب ص + جـ = صفر** (وديهم كلهم قبل يساوى)

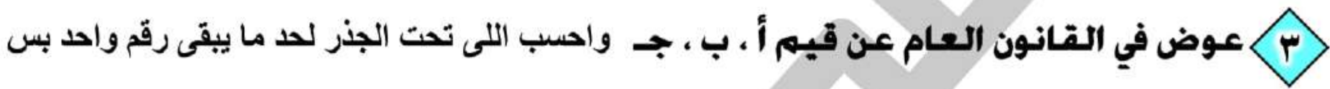


يعنى لو كانت كده : $س^2$ = ٥س + ٣ خليها كده : $س^2$ – ٥ س – ٣ = ٠



٢ **خد من المعادلة قيم أ ، ب ، جـ** بإشارتهم **الموجودة في المعادلة**

يعنى لو المعادلة كده $س^2$ – ٥س – ٣ = ٠ يبقى أ = ١ ، ب = –٥ ، جـ = –٣



٣ **عوض في القانون العام عن قيم أ ، ب ، جـ** واحسب اللى تحت الجذر لحد ما يبقى رقم واحد بس

زى كده س = $\frac{٥ \pm \sqrt{(-٥)^2 - ٤ \times ١ \times -٣}}{٢ \times ١} = \frac{٥ \pm \sqrt{٣٧}}{٢}$

٤ **افصل الناتج مرة بالـ (+) ومرة بالـ (–) واحسب القيمتين بالآلة الحاسبة**

زى كده : س = $\frac{٥ + \sqrt{٣٧}}{٢}$ = ٢,٥٤١ و س = $\frac{٥ - \sqrt{٣٧}}{٢}$ = – ٠,٥٤١

٥ **اكتب الناتجين في مجموعة الحل**

زى كده : م . ح = { ٢,٥٤١ ، – ٠,٥٤١ }

ملاحظات

ملحوظة ١ : شايف – ب اللى فوق في القانون؟ دى معناها انك تعوض عن ب بس بإشارة مختلفة

ملحوظة ٢ : شايف ٢أ اللى في المقام ؟ شايفها؟ لا دى مفيهاش حاجة ، بس كويس انك شايفها

ملحوظة ٣ : إذا كان المميز $ب^2$ – ٤أ جـ > صفر (موجب) فإن المعادلة لها جذران
وإذا كان $ب^2$ – ٤أ جـ < صفر (سالب) فإن المعادلة ليس لها حلول ، أي م . ح = Φ
وإذا كان $ب^2$ – ٤أ جـ = صفر فإن المعادلة لها جذر واحد (أو جذران متساويان)

١ باستخدام القانون العام أوجد مجموعة حل المعادلة الآتية في ح : ٣س^{٢} ـ ٥س + ١ = ٠ مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين

الحل

أ = ٣ ، ب = ـ٥ ، جـ = ١

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$$

$$س = \frac{٥ \pm \sqrt{٥^{٢} - ٤ \times ٣ \times ١}}{٢ \times ٣} = \frac{٥ \pm \sqrt{٢٥ - ١٢}}{٦} = \frac{٥ \pm \sqrt{١٣}}{٦}$$

إما $س = \frac{٥ + \sqrt{١٣}}{٦}$ ∴ س ≅ ١,٤٣

أو $س = \frac{٥ - \sqrt{١٣}}{٦}$ ∴ س ≅ ٠,٢٣

∴ م . ح = { ١,٤٣ ، ٠,٢٣ }

٢ أوجد باستخدام القانون العام مجموعة حل المعادلة س^{٢} ـ ٤س + ١ = ٠ مقربا الناتج لرقمين عشريين

الحل

أ = ١ ، ب = ـ٤ ، جـ = ١

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$$

$$س = \frac{٤ \pm \sqrt{٤^{٢} - ٤ \times ١ \times ١}}{٢ \times ١} = \frac{٤ \pm \sqrt{١٦ - ٤}}{٢} = \frac{٤ \pm \sqrt{١٢}}{٢}$$

إما $س = \frac{٤ + \sqrt{١٢}}{٢}$ ∴ س ≅ ٣,٧٣

أو $س = \frac{٤ - \sqrt{١٢}}{٢}$ ∴ س ≅ ٠,٢٧

∴ م . ح = { ٣,٧٣ ، ٠,٢٧ }

٣ أوجد مجموعة حل المعادلة س (س ـ ١) = ٤ باستخدام القانون العام مقربًا الناتج لثلاثة أرقام

الحل

الأول لازم نضرب الـ س في القوس

س^{٢} ـ س = ٤

س^{٢} ـ س ـ ٤ = ٠

أ = ١ ، ب = ـ١ ، جـ = ـ٤

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$$

$$س = \frac{١ \pm \sqrt{١^{٢} - ٤ \times ١ \times -٤}}{٢ \times ١} = \frac{١ \pm \sqrt{١ - -١٦}}{٢} = \frac{١ \pm \sqrt{١٧}}{٢}$$

إما $س = \frac{١ + \sqrt{١٧}}{٢}$ ∴ س ≅ ٢,٥٦٢

أو $س = \frac{١ - \sqrt{١٧}}{٢}$ ∴ س ≅ ـ ١,٥٦٢

∴ م . ح = { ٢,٥٦٢ ، ـ ١,٥٦٢ }

٤ أوجد مجموعة حل المعادلة (س ـ ٣)^{٢} ـ ٥س = ٠ مقربًا الناتج لرقمين عشريين

الحل



الأول لازم نفك القوس

س^{٢} ـ ٦س + ٩ ـ ٥س = ٠

س^{٢} ـ ١١س + ٩ = ٠

أ = ١ ، ب = ـ١١ ، جـ = ٩

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$$

$$= \frac{١١ \pm \sqrt{١١^{٢} - ٤ \times ١ \times ٩}}{٢ \times ١} = \frac{١١ \pm \sqrt{١٢١ - ٣٦}}{٢} = \frac{١١ \pm \sqrt{٨٥}}{٢}$$

إما $س = \frac{١١ + \sqrt{٨٥}}{٢}$ ∴ س ≅ ١٠,١١

أو $س = \frac{١١ - \sqrt{٨٥}}{٢}$ ∴ س ≅ ٠,٨٩

∴ م . ح = { ١٠,١١ ، ٠,٨٩ }

١ أوجد مجموعة حل المعادلة ٢س^{٢} ـ ٥س + ١ = ٠

باستخدام القانون العام مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد

الحل

أ = ...

ب = ...

جـ = ...

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$$

$$س = \frac{...... \pm \sqrt{(...)^{٢} - ......\times......\times......}}{٢ \times .....}$$

$$= \frac{.... \pm \sqrt{.... - ....}}{.....} = \frac{.... \pm \sqrt{....}}{.....}$$

إما س = $\frac{..... + \sqrt{.....}}{.....}$ أو س = $\frac{..... - \sqrt{.....}}{.....}$

∴ س ≅ ....   ∴ س ≅ ....

∴ م . ح = { ٢,٣ ، ٠,٢ } اتأكد بالآلة

٢ أوجد مجموعة حل المعادلة س^{٢} ـ س = ٤

باستخدام القانون العام مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد

الحل

مساعدة : اوعى تنسى تنقل الـ ٤ قبل = بإشارة مخالفة

٣ أوجد مجموعة حل المعادلة ٢س^{٢} = ٤س ـ ١

باستخدام القانون العام مقربًا الناتج لرقمين عشريين

الحل

٤ أوجد باستخدام القانون العام مجموعة حل المعادلة

$$\frac{٨}{س^{٢}} + \frac{١}{س} = ١$$

الحل

مساعدة : للتخلص من الكسور اضرب المعادلة كلها × س^{٢}

الحل البيانى لمعادلة الدرجة الثانية

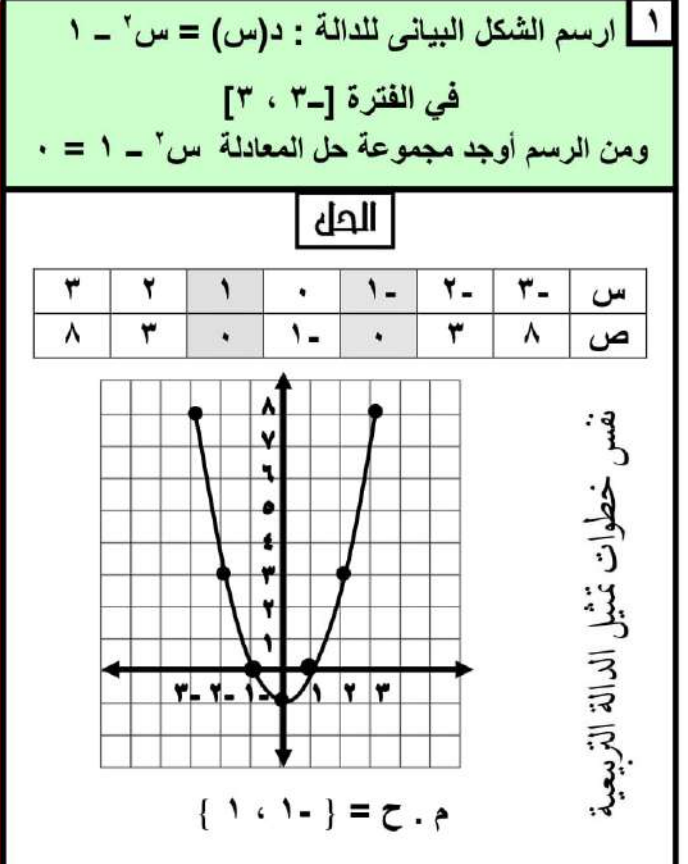
◆ مجموعة حل معادلة من الدرجة الثانية بيانيا هي : **قيم س التى يقطعها المنحنى من محور السينات**

◆ إذا لم يقطع المنحنى محور السينات فإن م . ح = Φ

١ ارسم الشكل البيانى للدالة : د(س) = س^{٢} − ١ في الفترة [−٣ ، ٣]
ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة س^{٢} − ١ = ٠

الحل

س	٣-	٢-	١-	٠	١	٢	٣
ص	٨	٣	٠	١-	٠	٣	٨

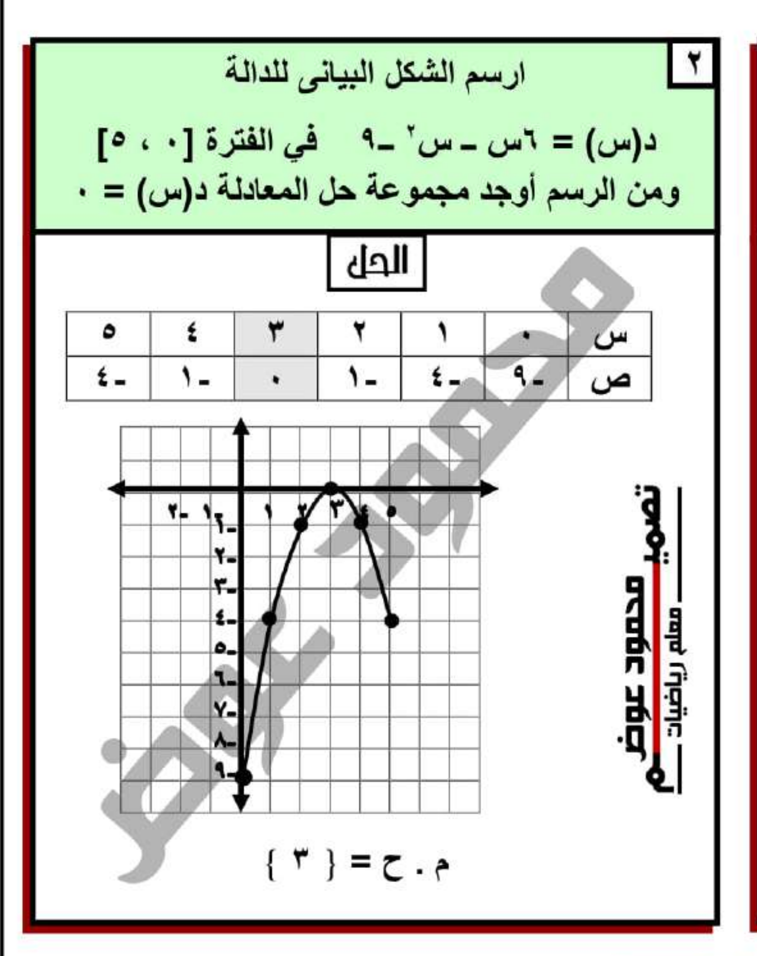


م . ح = { ١- ، ١ }

٢ ارسم الشكل البيانى للدالة
د(س) = ٦س − س^{٢} −٩ في الفترة [٠ ، ٥]
ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة د(س) = ٠

الحل

س	٠	١	٢	٣	٤	٥
ص	٩-	٤-	١-	٠	١-	٤-



م . ح = { ٣ }

2 تمارين

١ أوجد باستخدام القانون العام مجموعة حل المعادلة س^{٢} - ٢س - ٦ = ٠ مقربا الناتج لرقم عشرى واحد.

١ أوجد باستخدام القانون العام مجموعة حل المعادلة ٣س^{٢} - ٦س − ١ = ٠ مقربا الناتج لثلاثة أرقام عشرية

١ أوجد باستخدام القانون العام مجموعة حل المعادلة س (س − ٥) + ٣ = ٠ مقربا الناتج لثلاثة أرقام عشرية

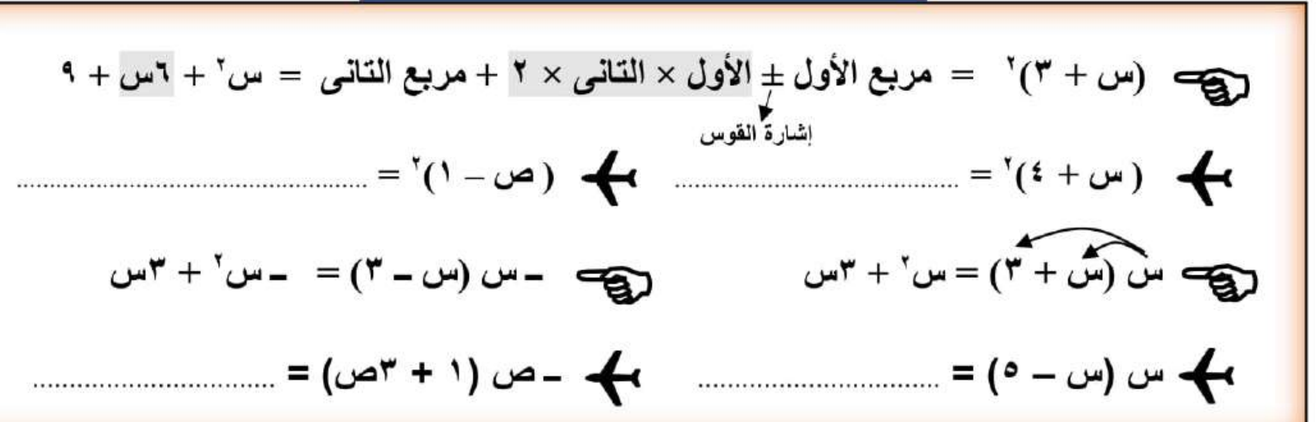
١ ارسم الشكل البيانى للدالة د حيث د(س) = س^{٢} − ٢س − ٤ في الفترة [−٢ ، ٤]
ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة س^{٢} − ٢س − ٤ = ٠

الدرس الثالث 3: حل معادلتين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الثانية

- ✱ ابدأ بمعادلة الدرجة الأولى وهات قيمة ص بدلالة س أو قيمة س بدلالة ص
- ✱ عوّض في معادلة الدرجة الثانية عن القيمة اللى انت جبتها
- ✱ فك الأقواس
- ✱ جمع المتشابه (وخلى المعادلة = ٠)
- ✱ التحليل (ولو لقيت رقم عامل مشترك اقسم عليه قبل التحليل)
- ✱ إما - أو (وهات قيمتين للمجهول)
- ✱ عوض عن القيمتين في معادلة الدرجة الأولى وهات قيمتين للمجهول التانى



تدريب على فك الأقواس



(س + ٣)^٢ = مربع الأول ± الأول × التانى × ٢ + مربع التانى = س^٢ + ٦س + ٩

إشارة القوس

(س + ٤)^٢ = ... (ص – ١)^٢ = ...

س (س + ٣) = س^٢ + ٣س ـ س (س ـ ٣) = ـ س^٢ + ٣س

س (س – ٥) = ... ـ ص (١ + ٣ص) = ...

تدريب على جمع المتشابه

- ☐ ١ + ٢ص + ص^٢ + ص^٢ ـ ٢٥ = ...
- ☐ ١ + ٤ص + ٤ص^٢ ـ ص ـ ٢ص^٢ = ...
- ☐ ص^٢ + ٢٠ص + ١٠٠ ـ ٤ص^٢ ـ ٤٠ص + ص^٢ ـ ٥٢ = ...
- ☐ س^٢ + س^٢ + ٦س + ٩ ـ س^٢ ـ ٣س ـ ١٣ = ...
- ☐ ص^٢ + ص^٢ + ص^٢ = ...

ملحوظة : س ص = ٩ هي معادلة من الدرجة الثانية وليست من الدرجة الأولى



١ أوجد في ح×ح مجموعة حل المعادلتين : (مراجعة)

س ـ ص = ١ ، س٢ + ص٢ = ٢٥

الحل

من معادلة الدرجة الأولى : س = ١ + ص

بالتعويض عن س = (١+ ص) في معادلة الدرجة الثانية

∴ (١ + ص)٢ + ص٢ = ٢٥ نفك الأقواس

١ + ٢ص + ص٢ + ص٢ ـ ٢٥ = ٠ نجمع المتشابه

٢ص٢ + ٢ص ـ ٢٤ = ٠ بالقسمة على ٢

ص٢ + ص ـ ١٢ = ٠ بالتحليل

(ص + ٤) (ص ـ ٣) = ٠

إما ص + ٤ = ٠ ∴ ص = ـ٤ | أو ص ـ ٣ = ٠ ∴ ص = ٣

بالتعويض في المعادلة س = ١ + ص

∴ س = ١ + ـ٤ ∴ س = ـ٣ | ∴ س = ١ + ٣ ∴ س = ٤

م . ح = { (ـ٣ ، ـ٤) ، (٤ ، ٣) }

٢ أوجد في ح٢ مجموعة حل المعادلتين :

س ـ ص = صفر ، س٢ + س ص + ص٢ = ٢٧

الحل

من معادلة الدرجة الأولى : س = ص

بالتعويض عن س = ص في معادلة الدرجة الثانية

∴ ص٢ + ص٢ + ص٢ = ٢٧ نجمع المتشابه

٣ص٢ = ٢٧ ⇐ ٣ص٢ ـ ٢٧ = ٠ بالقسمة على ٣

ص٢ ـ ٩ = ٠ بالتحليل

(ص + ٣) (ص ـ ٣) = ٠

إما ص + ٣ = ٠ ∴ ص = ـ٣ | أو ص ـ ٣ = ٠ ∴ ص = ٣

بالتعويض في المعادلة س ـ ص = ٠

∴ س ـ ـ٣ = ٠ ∴ س = ـ٣ | ∴ س ـ ٣ = ٠ ∴ س = ٣

م . ح = { (ـ٣ ، ـ٣) ، (٣ ، ٣) }

٣ أوجد مجموعة حل المعادلتين :

س ـ ٢ص ـ ١ = ٠ ، س٢ ـ س ص = ٠

الحل

من معادلة الدرجة الأولى : س = ١ + ٢ص

بالتعويض عن س = (١ + ٢ص) في معادلة الدرجة الثانية

∴ (١ + ٢ص)٢ ـ ص (١ + ٢ص) = ٠ نفك الأقواس

١ + ٤ص + ٤ص٢ ـ ص ـ ٢ص٢ = ٠ نجمع المتشابه

٢ص٢ + ٣ص + ١ = ٠ بالتحليل

إما ص + ١ = ٠ ∴ ص = ـ١ | أو ٢ص + ١ = ٠ ∴ ص = $\frac{-1}{2}$

بالتعويض في المعادلة س = ١ + ٢ص

∴ س = ١ + ٢ × ـ١ ∴ س = ـ١ | ∴ س = ١ + ٢ × $\frac{-1}{2}$ = ٠

م . ح = { (ـ١ ، ـ١) ، (٠ ، $\frac{-1}{2}$) }

٤ أوجد مجموعة حل المعادلتين :

س ـ ص = ١٠ ، س٢ ـ ٤س ص + ص٢ = ٥٢

الحل

من معادلة الدرجة الأولى : س = ص+١٠

بالتعويض عن س = (ص+١٠) في معادلة الدرجة الثانية

∴ (ص+١٠)٢ ـ ٤ص (ص+١٠) + ص٢ = ٥٢

ص٢ + ٢٠ص + ١٠٠ ـ ٤ص٢ ـ ٤٠ص + ص٢ ـ ٥٢ = ٠

ـ٢ص٢ ـ ٢٠ص + ٤٨ = ٠ بالقسمة على ـ٢

ص٢ + ١٠ص ـ ٢٤ = ٠

(ص + ١٢) (ص ـ ٢) = ٠

إما ص + ١٢ = ٠ ∴ ص = ـ١٢ | أو ص ـ ٢ = ٠ ∴ ص = ٢

بالتعويض في المعادلة س = ص + ١٠

∴ س = ـ١٢+١٠ ∴ س = ـ٢ | ∴ س = ٢ + ١٠ ∴ س = ١٢

م . ح = { (ـ٢ ، ـ١٢) ، (١٢ ، ٢) }

١ أوجد في ح × ح مجموعة حل المعادلتين

ص − س = ٣ ، س^2 + ص^2 − س ص = ١٣

الحل

من معادلة الدرجة الأولى : ....

بالتعويض في معادلة الدرجة الثانية

∴ ....

....

نفك الأقواس

∴ ....

نجمع المتشابه

∴ .... بالتحليل

∴ ....

إما .... أو ....

∴ .... ∴ ....

بالتعويض في ....

∴ .... ∴ ....

....

∴ م . ح = { (−٤ ، −١) ، (١ ، ٤) }

٢ مستطيل محيطه ١٤سم ومساحته ١٢ سم^2

أوجد كلا من بعديه

الحل

نفرض أن بُعدا المستطيل هما س ، ص

∵ محيط المستطيل = ٢(الطول + العرض)

∴ ١٤ = ٢(س + ص) بالقسمة على ٢

س + ص = ٧ ومنها ص = ٧ − س

∵ مساحة المستطيل = الطول×العرض ∴ س ص = ١٢

بالتعويض عن ص = ٧ − س في المعادلة س ص= ١٢

∴ س (٧ − س) = ١٢ ٧س − س^2 = ١٢

٧س − س^2 − ١٢ =٠ نرتب ونغير إشارة الكل

س^2 −٧س + ١٢ = ٠ (س − ٤) (س − ٣) = ٠

إما س = ٤ ∴ ص = ٧ − ٤ = ٣

أو س = ٣ ∴ ص = ٧ − ٣ = ٤

∴ بعدا المستطيل هما ٣سم ، ٤سم

٣ أوجد في ح×ح مجموعة حل المعادلتين :

ص − س = ٢ ، س^2 + س ص − ٤ = ٠

الحل



....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

٤ أوجد في ح×ح مجموعة حل المعادلتين :

س +ص =٥ ، س^2 + س ص =١٥

الحل

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....





اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

1) مجموعة حل المعادلتين س ـ ص = ٠ ، س ص = ٩ هي ....

أ) { (٠ ، ٠) } ب) { (-٣ ، -٣) } جـ) { (٣ ، ٣) } د) { (-٣ ، -٣) ، (٣ ، ٣) }

الحل : من المعادلة الأولى: س = ص بالتعويض في الثانية ص^2 = ٩ ∴ ص = ± ٣ بالتعويض في س = ص
عندما ص = -٣ ∴ س = -٣ ، عندما ص = ٣ ∴ س = ٣ ∴ م.ح = { (-٣ ، -٣) ، (٣ ، ٣) }

2) أحد حلول المعادلتين س ـ ص = ٢ ، س^2 + ص^2 = ٢٠ هو ....

أ) { (-٤ ، ٢) } ب) { (٢ ، -٤) } جـ) { (٣ ، ١) } د) { (٤ ، ٢) }

3) مجموعة حل المعادلتين س = ٢ ، س ص = ٦ هى ....

أ) { (٢ ، ٣) } ب) { ٢ ، ٣ } جـ) { (٣ ، ٢) } د) { ٣ }

4) إذا كانت ص = ٢ ، س^2 ـ ص^2 = ٥ فإن س = ...

أ) ـ٣ ب) ٣ جـ) ±٣ د) ٩

5) عددان مجموعهما ٧ وحاصل ضربهما ١٢ هما ....

أ) ٢ ، ٥ ب) ٢ ، ٦ جـ) ٣ ، ٤ د) ١ ، ٦

---

١) أوجد في ح × ح مجموعة حل المعادلتين س ـ ص = ٢ ، س^2 + ص^2 = ٢٠

٢) أوجد في ح × ح مجموعة حل المعادلتين س + ٢ص = ٤ ، س^2 + س ص + ص^2 = ٧

٣) أوجد في ح × ح مجموعة حل المعادلتين س ـ ص = ٠ ، س ص = ٩

٤) عددان مجموعهما ٩٠ وحاصل ضربهما ٢٠٠٠ أوجد العددين

٥) مستطيل يزيد طوله عن عرضه بمقدار ٣ سم ومساحته ٢٨ سم^2 أوجد محيطه.

٦) مثلث قائم الزاوية طول وتره ١٣ سم ، محيطه يساوى ٣٠ سم أوجد طولى ضلعى القائمة

إعداد أ/ محمود عوض



1 الدرس الأول — أصفار الدالة

تصميم محمود عوض
معلم رياضيات

* لإيجاد أصفار الدالة نساوى الدالة بالصفر ونحل المعادلة

مثال: إذا كانت د (س) = $س^٢$ ـ ٩ فأوجد أصفار الدالة

الحل: $س^٢$ ـ ٩ = ٠ ∴ $س^٢$ = ٩ ∴ س = ±٣ ∴ ص(د)= { -٣ ، ٣ }

* لو كانت د (س) = صفر فإن ص (د) = ح

* أصفار الكسر الجبرى = أصفار البسط ـ أصفار المقام

(يعنى اللى موجود في أصفار البسط ومش متكرر في أصفار المقام)

الدوال التي أصفارها = Φ

* ($س^٢$ + عفريت) ملوش أصفار: زى $س^٢$ + ٤ أو $س^٢$ + ٣ وهكذا ص(د) = Φ
* في مجموع المكعبين والفرق بينهما : القوس الكبير ملوش أصفار ص(د) = Φ
* لو كانت د(س) = أي عدد (ما عدا الصفر) زى د(س) = ٣ فإن ص(د) = Φ

تدريب: أوجد مجموعة أصفار كل من الدوال الآتية:

① د (س) = $٢س^٣$ ـ ١٨س

الحل : ....

....

ص (د) = ...

② د (س) = $س^٢$ + ٢س ـ ١٥

الحل : ....

....

ص (د) = ...

③ د (س) = $٢س^٣$ + ١٦

الحل : ....

....

ص (د) = ...

ملحوظة : لو أعطاك أصفار الدالة معلومة في المسألة عوّض بيها في الدالة وساوى الدالة بالصفر

مثال ١

إذا كانت { ـ٣ ، ٣ } هي مجموعة أصفار الدالة د حيث د(س) = $س^٢$ + أ فأوجد قيمة أ

الحل

∵ { ـ٣ ، ٣ } هي مجموعة أصفار الدالة

∴ أي قيمة من هذه القيم تجعل د (س) = ٠

∴ $٣^٢$ + أ = ٠

٩ + أ = ٠ ∴ أ = ـ٩

مثال ٢

إذا كانت د(س) = $س^٣$ ـ $٢س^٢$ ـ ٧٥

فاثبت أن العدد ٥ أحد أصفار هذه الدالة

الحل

بالتعويض في الدالة عن س = ٥

∴ د (٥) = $٥^٣$ ـ ٢ × $٥^٢$ ـ ٧٥

= ١٢٥ ـ ٥٠ ـ ٧٥

= ٠

∵ د (٥) = ٠ ∴ العدد ٥ أحد أصفار الدالة

مجال الكسر الجبرى

٠١٢٠٢٥٦٠٢٣٩



تصميم محمود عوض
معلم رياضيات

دالة الكسر الجبرى : يرمز لها بالرمز ن(س) أو ق(س) أو د(س) وهي دالة على صورة ن (س) = $\frac{\text{د (س)}}{\text{ق (س)}}$

مثل : ن (س) = $\frac{\text{س} + ٥}{٣}$ ، ن (س) = $\frac{٢\text{س}}{٢\text{س} + ٨}$ ، د (س) = $\frac{\text{س} - ٣}{\text{س}^٢ - ٧\text{س} + ١٢}$

- ◆ **مجال الكسر الجبرى = ح – أصفار المقام**

مثال : إذا كان ن (س) = $\frac{\text{س} - ١}{\text{س} - ٣}$ فإن مجال ن = ح – { ٣ }

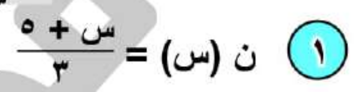
- ◆ **المجال المشترك لعدة كسور جبرية = ح – مجموعة أصفار المقامات**

مثال: إذا كان $\text{ن}_١$(س) = $\frac{١}{\text{س} - ١}$ ، $\text{ن}_٢$(س) = $\frac{\text{س} + ٣}{(\text{س} - ٥)(\text{س} + ٧)}$

فإن المجال المشترك لكل من $\text{ن}_١$ ، $\text{ن}_٢$ = ح – { ١ ، ٥ ، -٧ }

- ◆ **ملحوظة** : قبل إخراج المجال حلل المقام لو ليه تحليل .

تدريب ١ : عيّن مجال كل من الدوال الكسرية الآتية :



① ن (س) = $\frac{\text{س} + ٥}{٣}$

الحل

المقام عدد يبقى ملوش أصفار

المجال = ح

② ن (س) = $\frac{\text{س} - ٢}{٢\text{س}}$

الحل ....

③ ن (س) = $\frac{\text{س}^٢ - ١}{\text{س}^٢ + \text{س} - ٢}$

الحل ....

④ ن (س) = $\frac{\text{س} + ١}{\text{س}^٤ - \text{س}}$

الحل ....

⑤ ن (س) = $\frac{\text{س} - ٣}{\text{س}^٢ - ٤}$

الحل ....

⑥ ن (س) = $\frac{\text{س} + ١}{٤\text{س}^٣ - ٩\text{س}}$

الحل ....

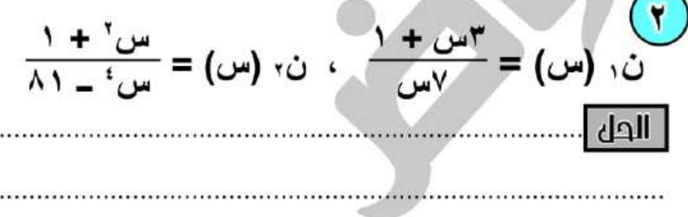
تدريب ٢ : عيّن المجال المشترك لكل من الدوال الكسرية الآتية :

① $\text{ن}_١$(س) = $\frac{١}{\text{س}^٢ - ١٦}$ ، $\text{ن}_٢$(س) = $\frac{\text{س} + ٥}{\text{س}^٢ - ٩\text{س} + ٢٠}$

الحل ....

② $\text{ن}_١$(س) = $\frac{٣\text{س} + ١}{٧\text{س}}$ ، $\text{ن}_٢$(س) = $\frac{\text{س}^٢ + ١}{\text{س}^٤ - ٨١}$

الحل ....





أمثلة وتدريبات على الأصفار والمجال

١ إذا كانت مجموعة أصفار الدالة
د(س) = أ س^{٢} + ب س + ١٥ هي { ٣ ، ٥}
فأوجد قيمة كل من أ ، ب

الحل

∵ د(٣) = ٠ ∴ ٩ أ + ٣ ب + ١٥ = ٠ بالقسمة ÷ ٣

٣ أ + ب = -٥ ⟵ ١

∵ د(٥) = ٠ ∴ ٢٥ أ + ٥ ب + ١٥ = ٠ بالقسمة ÷ ٥

٥ أ + ب = -٣ ⟵ ٢

بحل المعادلتين بطريقة الحذف

٣ أ + ب = -٥
٥ أ + ب = -٣ بالطرح
-٢ أ = -٢ ∴ أ = ١

بالتعويض في ١ ∴ ٣ + ب = -٥ ∴ ب = -٨

٢ إذا كان مجال الدالة ن(س) = $\frac{س - ١}{س^{٢} - أ س + ٩}$
هو ح - { ٣ } فأوجد قيمة أ

الحل

∵ المجال = ح - {٣}

∴ أصفار المقام = ٣

بالتعويض عن س = ٣ ونساوى المقام بالصفر

∴ ٣^{٢} - أ × ٣ + ٩ = ٠

٩ - ٣ أ + ٩ = ٠

١٨ - ٣ أ = ٠

٣ أ = ١٨

∴ أ = ٦

٣ إذا كانت { ٥ ، -٣} هي مجموعة أصفار الدالة
د(س) = س^{٢} - ٢ س + أ فأوجد قيمة أ

الحل

....

....

....

....

....

....

٤ إذا كان مجال الدالة د(س) = $\frac{س + ٥}{س^{٢} - أ}$
هو ح - { ٢ ، -٢ } فأوجد قيمة أ

الحل

....

....

....

....

....

....

٥ إذا كانت مجموعة أصفار الدالة ن(س) = $\frac{س - أ}{س + ب}$
هى { ٥ } ، و مجالها هو ح - { ٣ }
فأوجد قيمتى كل من أ ، ب

الحل

∵ أصفار الكسر الجبرى = { ٥ }

∴ أصفار البسط = { ٥ }

٥ - أ = ٠ ∴ أ = ٥

∵ المجال = ح - { ٣ } ∴ أصفار المقام = { ٣ }

٣ + ب = ٠ ∴ ب = -٣

٦ إذا كان مجال الدالة ن(س) = $\frac{ب}{س} + \frac{٩}{س + أ}$
هو ح - { ٠ ، ٤ } ، ن (٥) = ٢
فأوجد قيمتى أ ، ب

الحل

∵ المجال = ح - {٠ ، ٤} ∴ أصفار المقام الثانى = ٤

٤ + أ = ٠ ∴ أ = -٤

∴ ن(س) = $\frac{ب}{س} + \frac{٩}{س - ٤}$

∵ ن (٥) = ٢ ∴ $\frac{ب}{٥} + \frac{٩}{٥ - ٤} = ٢$

$\frac{ب}{٥}$ + ٩ = ٢ $\frac{ب}{٥}$ = -٧ ∴ ب = -٣٥





اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

1) مجموعة أصفار الدالة د(س) = س^{٢} + ٤ في ح هي ....

أ) { ٢ } ب) { ٢ ، -٢ } جـ) ح د) Φ

2) مجموعة أصفار الدالة د: د (س) = -٣س هى ....

أ) { ٠ } ب) { -٣ } جـ) { (-٣ ، ٠) } د) ح

3) مجموعة أصفار الدالة د: د (س) = س (س^{٢} -٢س +١) هى ....

أ) { ٠ ، ١ } ب) { ٠ ، -١ } جـ) { (-١ ، ٠) } د) { ١ }

الحل: ....

4) إذا كانت ص(د) = { ٢ } ، د(س) = س^{٣} - م فإن م = ...

أ) $\sqrt[٣]{٢}$ ب) ٢ جـ) ٤ د) ٨

الحل: ....

5) إذا كانت ص(د) = { ٥ } ، د(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} + أ فإن أ = ...

أ) -٥٠ ب) -٥ جـ) ٥ د) ٥٠

الحل: ....

6) مجال الدالة ن (س) = $\frac{س}{س - ١}$ هو ....

أ) ح - { صفر } ب) ح - { ١ } جـ) ح - { صفر ، ١ } د) ح - { -١ }

---

١) إذا كانت { - ٢ ، ٢ } هي مجموعة أصفار الدالة د(س) = س^{٢} + م فأوجد قيمة م.

٢) إذا كانت { ٣ ، ٤ } هي مجموعة أصفار الدالة د(س) = أس^{٢} + ب س +١٢ فأوجد قيمتى أ ، ب

٣) أوجد المجال المشترك لكل من : ن$_{١}$ (س) = $\frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢} - ٥س + ٦}$ ، ن$_{٢}$ (س) = $\frac{٣س}{س^{٢} - س}$

٤) إذا كان مجال الدالة د حيث د(س) = $\frac{س + ١}{س^{٢} + أ س + ٤}$ هو ح - { ٢ } فأوجد قيمة أ




اختزال الكسر الجبرى

خطوات اختزال الكسر الجبرى

- تحليل: تحليل البسط والمقام
- مجال: إخراج المجال = ح ـ أصفار المقام
- حذف: حذف العوامل المتشابهة بين البسط والمقام



مثال

اختصر لأبسط صورة ن(س) = $\frac{س^٢ - ١}{س^٢ + ٤س - ٥}$

الحل

التحليل : ن (س) = $\frac{(س - ١)(س + ١)}{(س - ١)(س + ٥)}$

المجال : المجال = ح - { ١ ، -٥ }

الحذف : ن(س) = $\frac{س + ١}{س + ٥}$

تدريب ١

اختصر لأبسط صورة ن(س) = $\frac{س^٣ - ١}{س^٣ + س^٢ + س}$

الحل

التحليل :ـ ....

المجال : ....

الحذف : ....

تدريب ٢

اختصر لأبسط صورة ن(س) = $\frac{س^٢ - ٤}{س^٣ - ٨}$

الحل

....

....

....

....

....

....

....

تدريب ٣

اختصر لأبسط صورة ن(س) = $\frac{س^٢ - ٦س + ٩}{٢س^٢ - ١٨س}$

الحل

....

....

....

....

....

....

....



متى يتساوى كسرين جبريين

لو عايز تعرف هل : $ن_١ = ن_٢$ أم لا اتبع الآتى :

- اختصر كل كسر لوحده بالخطوات الثلاثة **(تحليل – مجال – حذف)**
- $ن_١ = ن_٢$ إذا تحقق شرطان معًا وهما : ❶ مجال $ن_١$ = مجال $ن_٢$ ❷ $ن_١(س) = ن_٢(س)$ بعد الاختصار النهائي
- لو لقيت **مجال $ن_١$ = مجال $ن_٢$** بينما $ن_١(س) \neq ن_٢(س)$ فإن $ن_١ \neq ن_٢$
- لو لقيت $ن_١(س) = ن_٢(س)$ بينما **مجال $ن_١ \neq$ مجال $ن_٢$** فإن: $ن_١ \neq ن_٢$

ولكن في حالة اختلاف المجالين يكون $ن_١ = ن_٢$ في المجال المشترك فقط

مثال ١

إذا كان $ن_١(س) = \frac{س^٢}{س^٣ - س^٢}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٣ + س^٢ + س}{س^٤ - س}$ اثبت أن: $ن_١ = ن_٢$

الحل

$ن_١(س) = \frac{س^٢}{س^٣ - س^٢} = \frac{س^٢}{س^٢(س - ١)}$

مجال $ن_١$ = ح – {٠ ، ١}

$ن_١(س) = \frac{١}{س - ١}$

$ن_٢(س) = \frac{س^٣ + س^٢ + س}{س^٤ - س} = \frac{س(س^٢ + س + ١)}{س(س^٣ - ١)}$

$= \frac{س(س^٢ + س + ١)}{س(س - ١)(س^٢ + س + ١)}$

مجال $ن_٢$ = ح – {٠ ، ١}

$ن_٢(س) = \frac{١}{س - ١}$

∵ $ن_١(س) = ن_٢(س)$ ، **مجال $ن_١$ = مجال $ن_٢$**

∴ $ن_١ = ن_٢$

مثال ٢

أوجد المجال المشترك الذى تتساوى فيه $ن_١$ ، $ن_٢$ حيث:

$ن_١(س) = \frac{س^٢ + س + ١٢}{س^٢ + ٥س + ٤}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ - ٢س - ٣}{س^٢ + ٢س + ١}$

الحل

$ن_١(س) = \frac{س^٢ + س + ١٢}{س^٢ + ٥س + ٤} = \frac{(س + ٤)(س - ٣)}{(س + ٤)(س + ١)}$

مجال $ن_١$ = ح – {-٤ ، -١}

$ن_١(س) = \frac{س - ٣}{س + ١}$

$ن_٢(س) = \frac{س^٢ - ٢س - ٣}{س^٢ + ٢س + ١} = \frac{(س - ٣)(س + ١)}{(س + ١)(س + ١)}$

مجال $ن_٢$ = ح – {-١}

$ن_٢(س) = \frac{س - ٣}{س + ١}$

∵ $ن_١(س) = ن_٢(س)$ بينما **مجال $ن_١ \neq$ مجال $ن_٢$**

∴ $ن_١ = ن_٢$ **في المجال المشترك ح – {-٤ ، -١}**

١

إذا كان $ن_{١}(س) = \frac{٢س}{٢س + ٨}$ ،

$ن_{٢}(س) = \frac{س^{٢} + ٤س}{س^{٢} + ٨س + ١٦}$ اثبت أن : $ن_{١} = ن_{٢}$

الحل

٢

إذا كان $ن_{١}(س) = \frac{٢س^{٣} + ٦س}{(س - ١)(س^{٢} + ٣)}$ ، $ن_{٢}(س) = \frac{٢س}{س - ١}$

بيِّن إذا كان $ن_{١} = ن_{٢}$ أم لا ؟ مع ذكر السبب

الحل

٣

أوجد المجال المشترك الذى تتساوى فيه الدالتان:

$ن_{١}(س) = \frac{س^{٢} + ٩س + ٢٠}{س^{٢} - ١٦}$ ، $ن_{٢}(س) = \frac{س + ٥}{س^{٢} - ٤س}$

الحل

٤

إذا كان $ن_{١}(س) = \frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢} + س - ٦}$ ،

$ن_{٢}(س) = \frac{س^{٣} - س^{٢} - ٦س}{س^{٣} - ٩س}$ اثبت أن: $ن_{١}(س) = ن_{٢}(س)$

لجميع قيم س التي تنتمى إلى المجال المشترك ، وأوجد هذا المجال

الحل

$ن_{١}(س) = \frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢} + س - ٦} = \frac{(س + ٢)(س - ٢)}{(س + ٣)(س - ٢)}$

$ن_{١}(س) = \frac{س + ٢}{س + ٣}$ مجال $ن_{١}$ = ح − {−٣ ، ٢}

$ن_{٢}(س) = \frac{س^{٣} - س^{٢} - ٦س}{س^{٣} - ٩س} = \frac{س(س^{٢} - س - ٦)}{س(س^{٢} - ٩)}$

$= \frac{س(س - ٣)(س + ٢)}{س(س - ٣)(س + ٣)}$

$ن_{٢}(س) = \frac{س + ٢}{س + ٣}$ مجال $ن_{٢}$ = ح − {−٣ ، ٠ ، ٣}

∵ $ن_{١}(س) = ن_{٢}(س)$ بينما مجال $ن_{١} \neq$ مجال $ن_{٢}$

∴ $ن_{١}(س) = ن_{٢}(س)$ فقط في المجال المشترك

ح − {−٣،٢،٠،٣}





اختر الإجابة الصحيحة:

① إذا كان $ن_١(س) = \frac{-٧}{س + ٢}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س}{س - ك}$ وكان المجال المشترك هو ح ـ {-٢ ، ٧} فإن ك = ...

أ) ٢ ب) ٧ جـ) -٢ د) -٧

② إذا كانت $ن_١(س) = \frac{١ + أ}{س - ٢}$ ، $ن_٢(س) = \frac{٤}{س - ٢}$ وكان $ن_١(س) = ن_٢(س)$ فإن أ = ...

أ) ١ ب) ٢ جـ) ٣ د) ٤

اختزل كل من الكسور التالية محددا مجالها:

① $\frac{س^٢ - ١}{(س - ١)(س + ٥)}$

② $\frac{٢س^٢ + ٧س + ٦}{٤س^٢ + ٤س - ٣}$

---

[١] إذا كانت: $ن_١(س) = \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ + س - ٦}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ - س - ٦}{س^٢ - ٩}$ بين ما إذا كانت $ن_١ = ن_٢$ أم لا مع ذكر السبب

[٢] إذا كانت: $ن_١(س) = \frac{س^٢}{س^٣ - ٣س^٢}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س}{س^٢ - ٣س}$ فاثبت أن $ن_١ = ن_٢$

[٣] إذا كانت: $ن_١(س) = \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ + س - ٦}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ - س - ٦}{س^٢ - ٩}$ فاثبت أن $ن_١ = ن_٢$

[٤] إذا كانت: $ن_١(س) = \frac{٢س^٢ + ٦س}{(س - ١)(س^٢ + ٣)}$ ، $ن_٢(س) = \frac{٢س}{س - ١}$ فاثبت أن $ن_١ = ن_٢$

جمع وطرح الكسور الجبرية

إعداد أ/ محمود عوض

خطوات جمع وطرح الكسور الجبرية :

١ ترتيب حدود المقادير (يعنى ١٥ – ١٣ س + ٢س^{٢} رتبه بإشاراته وخليه كده ٢س^{٢} – ١٣س + ١٥)

٢ تحليل بسط ومقام كل كسر إن أمكن

٣ إخراج المجال المشترك (ح – أصفار المقامات)

٤ حذف العوامل المتشابهة في كل كسر لوحده (إوعى تحذف قوس من الكسر الأول مع قوس من الكسر التانى)

٥ لو لقيت المقامات موحدة : خد مقام منهم وإجمع البسطين أو اطرحهم (حسب العملية) .

زى كده : $\frac{س}{س + ٢} + \frac{٣}{س + ٢} = \frac{س + ٣}{س + ٢}$

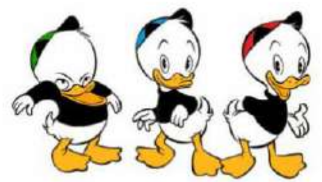
لو المقامات غير موحدة : وحد المقامات كالتالى :

شوف إيه اللى موجود في مقام الأول ومش موجود في مقام التانى واضربه × الكسر التانى كله (بسط ومقام)

وشوف إيه اللى موجود في مقام التانى ومش موجود في مقام الأول واضربه × الكسر التانى كله (بسط ومقام)

زى كده : $\frac{س}{س - ٢} + \frac{س + ٣}{(س - ٣)(س - ٢)}$ هنضرب بسط ومقام الأول × (س – ٣)

هيبقى كده : $\frac{س (س - ٣)}{(س - ٢)(س - ٣)} + \frac{س + ٣}{(س - ٣)(س - ٢)}$



أو كده : $\frac{س}{س + ١} + \frac{١}{س - ١}$ هنضرب بسط ومقام الأول × (س – ١) وهنضرب بسط ومقام التانى × (س + ١)

هيبقى كده : $\frac{س (س - ١)}{(س + ١)(س - ١)} + \frac{س + ١}{(س - ١)(س + ١)}$

٦ اجمع المتشابه في البسط ولو نفع يتحلل حلله و ضع المقدار في أبسط صورة

فمثلا : $\frac{س^{٢} - ٣س + س + ٣}{(س - ٢)(س - ٣)} = \frac{س^{٢} - ٢س + ٣}{(س - ٢)(س - ٣)} = \frac{(س - ٣)(س + ١)}{(س - ٢)(س - ٣)} = \frac{س + ١}{س - ٢}$

ملحوظة هامة

لو لقيت مقدار فيه حدين مطروحين ومش مرتب

زى كده ٣ – س هنخليه كده – (س – ٣)

أو كده ١ – س^{٢} هنخليه كده – (س^{٢} – ١)

١ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$ن(س) = \frac{س - ٣}{س^٢ - ٧س + ١٢} - \frac{٤}{س^٢ - ٤س}$$

الحل

$$ن(س) = \frac{س - ٣}{(س - ٤)(س - ٣)} - \frac{٤}{س(س - ٤)}$$

المجال = ح - { ٤ ، ٣ ، ٠ }

$$ن(س) = \frac{١}{س - ٤} - \frac{٤}{س(س - ٤)}$$

نوحد المقامات : نضرب الكسر الأول × س

$$ن(س) = \frac{س}{س(س - ٤)} - \frac{٤}{س(س - ٤)}$$

خد منهم مقام واطرح البسطين

$$ن(س) = \frac{س - ٤}{س(س - ٤)} = \frac{١}{س}$$

٢ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$ن(س) = \frac{س^٢ + ٢س}{س^٢ - ٤} + \frac{س + ٣}{س^٢ - ٥س + ٦}$$

الحل

$$ن(س) = \frac{س(س + ٢)}{(س - ٢)(س + ٢)} + \frac{س + ٣}{(س - ٣)(س - ٢)}$$

المجال = ح - { ٢ ، -٢ ، ٣ }

$$ن(س) = \frac{س}{س - ٢} + \frac{س + ٣}{(س - ٣)(س - ٢)}$$

نوحد المقامات : نضرب الكسر الأول × (س - ٣)

$$ن(س) = \frac{س(س - ٣)}{(س - ٢)(س - ٣)} + \frac{س + ٣}{(س - ٣)(س - ٢)}$$

اضرب س × القوس واجمع البسطين

$$ن(س) = \frac{س^٢ - ٣س + س + ٣}{(س - ٢)(س - ٣)} = \frac{س^٢ - ٢س + ٣}{(س - ٢)(س - ٣)}$$

تصميم محمود عوض
معلم رياضيات

٣ أوجد الدالة ن في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$ن(س) = \frac{س^٢ - ٨س + ١٢}{س^٢ - ٤س + ٤} + \frac{س^٢ - ٤س - ٥}{س^٢ - ٧س + ١٠}$$

الحل

$$ن(س) = \frac{(س - ٢)(س - ٦)}{(س - ٢)(س - ٢)} + \frac{(س - ٥)(س + ١)}{(س - ٥)(س - ٢)}$$

المجال = ح - { ٢ ، ٥ }

$$ن(س) = \frac{س - ٦}{س - ٢} + \frac{س + ١}{س - ٢}$$

$$= \frac{س - ٦ + س + ١}{س - ٢}$$

اجمع الحدود المتشابهة اللى في البسط

$$ن(س) = \frac{٢س - ٥}{س - ٢}$$

٤ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$ن(س) = \frac{س^٢}{س - ١} + \frac{س}{١ - س}$$

الحل

١ - س هنخليه - (س - ١)

$$ن(س) = \frac{س^٢}{س - ١} + \frac{س}{-(س - ١)}$$

هنضرب السالب اللى قدام القوس × الـ + بتاعت الجمع

$$ن(س) = \frac{س^٢}{س - ١} - \frac{س}{س - ١}$$

خد بالك ان العملية اتحولت طرح

المجال = ح - { ١ }

$$ن(س) = \frac{س^٢ - س}{س - ١} = \frac{س(س - ١)}{س - ١} = س$$

١ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا المجال حيث:

$$ن\,(س) = \frac{س}{س^{٢} + ٢س} + \frac{س + ٢}{س^{٢} - ٤}$$

الحل

٢ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا المجال :

$$ن(س) = \frac{س^{٢} - س}{س^{٢} - ١} + \frac{س - ٥}{س^{٢} - ٦س + ٥}$$

الحل

٣ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا المجال:

$$ن\,(س) = \frac{س^{٢} + ٢س + ٤}{س^{٣} - ٨} - \frac{٩ - س^{٢}}{س^{٢} + س - ٦}$$

الحل

٤ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا المجال:

$$ن\,(س) = \frac{س}{س - ٤} - \frac{س + ٤}{س^{٢} - ١٦}$$

الحل

ضرب وقسمة الكسور الجبرية

إعداد أ/ محمود عوض



خطوات ضرب الكسور الجبرية :

١ تحليل بسط ومقام كل كسر إن أمكن (متنساش العامل المشترك)

٢ إخراج المجال المشترك (ح – أصفار المقامين)

٣ حذف العوامل المشتركة بين أي بسط وأى مقام


يعنى تقدر تحذف قوس من بسط الأول مع اللى شبهه في مقام التانى وهكذا و ده بينفع في الضرب ومش بينفع في الجمع

٤ ضرب البسط × البسط والمقام × المقام

الحل:	مثال:
$ن(س) = \frac{(س+٣)(س-١)}{س+٣} \times \frac{س+١}{(س+١)(س-١)}$ المجال = ح – { –٣ ، –١ ، ١ } ، ن (س) = ١	أوجد ن (س) في أبسط صورة حيث $ن(س) = \frac{س^{٢}+٢س-٣}{س+٣} \times \frac{س+١}{س^{٢}-١}$



قسمة الكسور الجبرية

✱ كل اللى هتعمله انك تحوّل القسمة إلى ضرب كالتالى :

الـ ÷ خليها × ⬅ وشقلب الكسر التانى ⬅ وحل بخطوات الضرب عادى

✱ ملحوظة : فيه اختلاف صغير في مسائل القسمة لما تكتب المجال وهو :

المجال في القسمة = ح – أصفار المقامين وأصفار بسط الثانى

الحل:	مثال:
$ن(س) = \frac{س^{٢}+٢س-٣}{س+٣} \times \frac{س+٥}{س^{٢}-١}$ $= \frac{(س+٣)(س-١)}{س+٣} \times \frac{(س+٥)}{(س+١)(س-١)}$ المجال = ح – { –٣ ، –١ ، ١ ، –٥ } $ن(س) = \frac{س+٥}{س+١}$	أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا المجال حيث : $ن(س) = \frac{س^{٢}+٢س-٣}{س+٣} \div \frac{س^{٢}-١}{س+٥}$

أمثلة محلولة

١ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$ن(س) = \frac{س^3 - ٨}{س^2 + س - ٦} \times \frac{س + ٣}{س^2 + ٢س + ٤}$$

الحل

$$ن(س) = \frac{(س - ٢)(س^2 + ٢س + ٤)}{(س + ٣)(س - ٢)} \times \frac{س + ٣}{س^2 + ٢س + ٤}$$

المجال = ح − { ٢ ، −٣ }

ن(س) = ١

٢ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$ن(س) = \frac{س^3 - ١}{س^2 - س} \times \frac{س + ٣}{س^2 + س + ١}$$

الحل

$$ن(س) = \frac{(س - ١)(س^2 + س + ١)}{س(س - ١)} \times \frac{س + ٣}{س^2 + س + ١}$$

المجال = ح − { ٠ ، ١ }

$$ن(س) = \frac{س + ٣}{س}$$

٣ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$ن(س) = \frac{س^2 + ٢س}{س^2 - ٩} \div \frac{٢س}{س + ٣}$$

الحل

$$ن(س) = \frac{س^2 + ٢س}{س^2 - ٩} \times \frac{س + ٣}{٢س}$$

$$ن(س) = \frac{س(س + ٢)}{(س + ٣)(س - ٣)} \times \frac{س + ٣}{٢س}$$

المجال = ح − { −٣ ، ٣ ، ٠ }

$$ن(س) = \frac{س + ٢}{٢(س - ٣)}$$

٤ إذا كانت $ن(س) = \frac{س^2 - ٩}{٢س^2 + ٣س} \div \frac{٣س^2 + ٦س - ٤٥}{٤س^2 - ٩}$

فأوجد ن(س) في أبسط صورة موضحًا المجال

الحل

$$ن(س) = \frac{س^2 - ٩}{٢س^2 + ٣س} \times \frac{٤س^2 - ٩}{٣س^2 + ٦س - ٤٥}$$

$$ن(س) = \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{س(٢س + ٣)} \times \frac{(٢س - ٣)(٢س + ٣)}{٣(س^2 + ٢س - ١٥)}$$

$$= \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{س(٢س + ٣)} \times \frac{(٢س - ٣)(٢س + ٣)}{٣(س + ٥)(س - ٣)}$$

المجال = ح − { ٠ ، $-\frac{٣}{٢}$ ، −٥ ، ٣ ، $\frac{٣}{٢}$ }

$$ن(س) = \frac{(س + ٣)(٢س - ٣)}{٣س(س + ٥)}$$

٥ أوجد: $ن(س) = \frac{س^2 + ٤س + ٣}{س^3 - ٢٧} \div \frac{س + ٣}{س^2 + ٣س + ٩}$

ثم أوجد ن(٢) ، ن(−٣) إن أمكن

الحل

$$ن(س) = \frac{(س + ٣)(س + ١)}{(س - ٣)(س^2 + ٣س + ٩)} \times \frac{س^2 + ٣س + ٩}{س + ٣}$$

المجال = ح − { ٣ ، −٣ }

$$ن(س) = \frac{س + ١}{س - ٣}$$

$$ن(٢) = \frac{٢ + ١}{٢ - ٣} = -٣$$

ن(−٣) غير ممكنة لأن −٣ ∉ للمجال

٦ أوجد ن(س) وعين مجالها حيث:

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س} + ١}{\text{س}^٢ - \text{س} - ٢} \times \frac{\text{س}^٢ + ٣\text{س} - ١٠}{٣\text{س}^٢ + ١٦\text{س} + ٥}$$

ثم أوجد ن (٠) ، ن (−١) إن أمكن

الحل

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س} + ١}{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ١)} \times \frac{(\text{س} + ٥)(\text{س} - ٢)}{(\text{س} + ٥)(٣\text{س} + ١)}$$

المجال = ح − { ٢ ، −١ ، −٥ ، $\frac{-١}{٣}$ }

$$\text{ن (س)} = \frac{١}{٣\text{س} + ١}$$

$$\text{ن } (٠) = \frac{١}{٣ \times ٠ + ١} = ١$$

ن (−١) غير ممكنة لأن −١ ∉ للمجال

٧ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^٢ - ٢\text{س} - ١٥}{\text{س}^٢ - ٩} \div \frac{٢\text{س} - ١٠}{\text{س}^٢ - ٦\text{س} + ٩}$$

الحل

متنساش: الـ ÷ هنخليها × وهنشقلب الكسر التانى

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^٢ - ٢\text{س} - ١٥}{\text{س}^٢ - ٩} \times \frac{\text{س}^٢ - ٦\text{س} + ٩}{٢\text{س} - ١٠}$$

$$\text{ن(س)} = \frac{(\text{س} - ٥)(\text{س} + ٣)}{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)} \times \frac{(\text{س} - ٣)(\text{س} - ٣)}{٢(\text{س} - ٥)}$$

المجال = ح − { ٣ ، −٣ ، ٥ }

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س} - ٣}{٢}$$



٨ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$\text{ن (س)} = \frac{\text{س}^٢ - ١٢\text{س} + ٣٦}{\text{س}^٢ - ٦\text{س}} \times \frac{٤\text{س} + ٢٤}{٣٦ - \text{س}^٢}$$

الحل

عارف هنعمل إيه في المقدار ٣٦ − س² !!

هنخليه كده −(س² − ٣٦)

$$\text{ن(س)} = \frac{(\text{س} - ٦)(\text{س} - ٦)}{\text{س}(\text{س} - ٦)} \times \frac{٤(\text{س} + ٦)}{-(\text{س} - ٦)(\text{س} + ٦)}$$

المجال = ح − { ٠ ، ٦ ، −٦ }

$$\text{ن (س)} = \frac{-٤}{\text{س}}$$

٩ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث :

$$\text{ن (س)} = \frac{\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٢}{١ - \text{س}^٢} \div \frac{٣\text{س} - ١٥}{\text{س}^٢ - ٦\text{س} + ٥}$$

الحل

١ − س² هنخليه −(س² − ١) ونحول الضرب لقسمة

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٢}{-(\text{س}^٢ - ١)} \times \frac{\text{س}^٢ - ٦\text{س} + ٥}{٣\text{س} - ١٥}$$

$$= \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ١)}{-(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)} \times \frac{(\text{س} - ٥)(\text{س} - ١)}{٣(\text{س} - ٥)}$$

المجال = ح − {١ ، −١ ، ٥}

$$\text{ن(س)} = \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ١)}{-٣(\text{س} + ١)}$$

١ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^{٢} + \text{س} + ١}{\text{س}} \times \frac{\text{س}^{٢} - \text{س}}{\text{س}^{٣} - ١}$$

الحل

٢ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا المجال حيث:

$$\text{ن (س)} = \frac{٣\text{س} - ١٥}{\text{س} + ٣} \times \frac{٤\text{س} + ١٢}{٥\text{س} - ٢٥}$$

الحل

٣ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا المجال حيث :

$$\text{ن (س)} = \frac{\text{س}^{٢} - ٣\text{س}}{٢\text{س}^{٢} - \text{س} - ٦} \div \frac{٢\text{س}^{٢} - ٣\text{س}}{٤\text{س}^{٢} - ٩}$$

الحل

٤ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$\text{ن (س)} = \frac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س}}{\text{س}^{٣} - ٢٧} \div \frac{\text{س} + ٢}{\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ٩}$$

ثم أوجد ن (٢) ، ن (-٢) إن أمكن

الحل

المعكوس الضربى للكسر الجبرى

◆ إذا رمزنا للكسر الجبرى بالرمز ن (س) فإن معكوسه الضربى يرمز له بالرمز $ن^{-1}(س)$

◆ إذا كان ن (س) = $\frac{س - ١}{س + ٣}$ فإن $ن^{-1}(س) = \frac{س + ٣}{س - ١}$ (شقلب الكسر يجيلك معكوسه)

◆ مجال $ن^{-1}$ = ح – أصفار البسط و المقام — من المثال اللى فات: مجال $ن^{-1}(س)$ = ح – { -٣ ، ١ }

مثال ١

إذا كان ن (س) = $\frac{س^2 - ٩}{س^2 + س - ٦}$

أوجد $ن^{-1}(س)$ في أبسط صورة مبينًا مجال $ن^{-1}(س)$

الحل

$ن^{-1}(س) = \frac{س^2 + س - ٦}{س^2 - ٩}$ *شقلبنا الكسر*

$= \frac{(س + ٣)(س - ٢)}{(س + ٣)(س - ٣)}$ *حللنا*

المجال = ح – { –٣ ، ٣ ، ٢ }

$ن^{-1}(س) = \frac{س - ٢}{س - ٣}$ *اختصرنا*

تدريب ١

إذا كان ن (س) = $\frac{س^2 + ٣س}{س^3 + ٢٧}$

أوجد $ن^{-1}(س)$ في أبسط صورة مبينًا مجال $ن^{-1}(س)$

الحل

....

....

....

....

....

....

....

مثال ٢

إذا كان ن (س) = $\frac{س^2 - ٢س}{س^2 - ٣س + ٢}$

فأوجد: (١) $ن^{-1}(س)$ مبينا مجالها

(٢) **قيمة** س **إذا كان** $ن^{-1}(س) = ٣$

الحل

$ن^{-1}(س) = \frac{س^2 - ٣س + ٢}{س^2 - ٢س} = \frac{(س - ٢)(س - ١)}{س(س - ٢)}$

مجال $ن^{-1}$ = ح – { ٠ ، ٢ ، ١ }

$ن^{-1}(س) = \frac{س - ١}{س}$

∵ $ن^{-1}(س) = ٣$ ∴ $\frac{س - ١}{س} = ٣$ (مقص)

∴ س – ١ = ٣س ٢س = –١ س = $\frac{-١}{٢}$

تدريب ٢

إذا كان ن (س) = $\frac{س^2 - ٣س}{(س - ٣)(س^2 + ٢)}$

فأوجد: (١) $ن^{-1}(س)$ مبينا مجالها

(٢) **قيمة** س **إذا كان** $ن^{-1}(س) = ٣$

الحل

....

....

....

....

....

....

....

....





(1) إذا كانت س ≠ صفر فإن $\frac{٥س}{س^٢ + ١} \div \frac{س}{س^٢ + ١} =$ ....

أ) − ٥ ب) − ١ جـ) ١ د) ٥

(2) مجال المعكوس الضربى للدالة د(س) = $\frac{س + ٢}{س - ٣}$ هو ....

أ) { ٣ } ب) ح − { −٢ ، ٣ } جـ) ح − { ٣ } د) ح

(3) إذا كان للكسر الجبرى $\frac{س - أ}{س + ٥}$ معكوس ضربى وهو $\frac{س + ٥}{س + ٣}$ فإن أ = ...

أ) ٣ ب) −٥ جـ) −٣ د) ٥

(4) أبسط صورة للكسر $\frac{٥س}{س^٢ + ١} \div \frac{س}{س^٢ + ١}$ هى ....

أ) −٥ ب) −١ جـ) ١ د) ٥

(5) إذا كان $\frac{س - ك}{س - ٣}$ معكوس ضربى وهو $\frac{س - ٣}{س + ٢}$ فإن ك = ...

أ) ٣ ب) ٢ جـ) −٢ د) −٣

---

[١] أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا المجال حيث: ن (س) = $\frac{س^٢ - ٢س + ١}{س^٣ - ١} \div \frac{٢س - ٢}{س^٢ + س + ١}$

[٢] أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا المجال حيث: ن (س) = $\frac{س^٢ + ٢س - ٣}{س + ٣} \div \frac{س^٢ - ١}{س + ١}$

[٣] إذا كان ن (س) = $\frac{س^٢ - ٤٩}{س^٣ - ٨} \times \frac{س - ٢}{س + ٧}$ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا مجالها ثم احسب قيمة ن (١)

[٤] إذا كان ن(س) = $\frac{س - ٢}{س + ١}$ فأوجد : ١) $ن^{-١}$(س) مبينًا مجالها ٢) $ن^{-١}$(٣)

[٥] إذا كان ن(س) = $\frac{س^٢ - ٤س - ٥}{س^٢ - ٢٥}$ فأوجد : ١) $ن^{-١}$(س) مبينًا مجالها ٢) $ن^{-١}$(٥)

٠١٢٠٢٥٦٠٢٣٩







الاحتمال

الاتحاد ∪

إذا كان أ ، ب حدثان من فضاء العينة فإن :

ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

إذا كان أ ، ب حدثان **متنافيان** فإن :

ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب)

ملحوظة: امتى يطلب ل (أ ∪ ب) بالطريقة اللفظية؟

لو قلك : أوجد احتمال وقوع الحدث أ أو ب

أو قلك : أوجد احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل

إذا كانت أ ⊃ ب فإن : ل (أ ∪ ب) = ل (ب) الكبيرة

مثال

إذا كان ل(أ) = $\frac{1}{2}$ ، ل(ب) = $\frac{1}{3}$ ، ل(أ ∩ ب) = $\frac{1}{5}$

أوجد : ل (أ ∪ ب)

الحل :

ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

ل (أ ∪ ب) = $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{7}{10}$ بالآلة الحاسبة

شكل فن

ف: أ = {١ ، ٣}، ب = {٤}، أ ∩ ب = {٢}، خارجهما ٨

أ ∪ ب = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

ل (أ ∪ ب) = $\frac{\text{عدد عناصر أ ∪ ب}}{\text{العدد الكلى}}$

= $\frac{4}{5}$

التقاطع ∩

إذا كان أ ، ب حدثان من فضاء العينة فإن :

ل (أ ∩ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∪ ب)

إذا كان أ ، ب حدثان **متنافيان** فإن :

ل (أ ∩ ب) = صفر ، أ ∩ ب = Φ

ملحوظة: امتى يطلب ل (أ ∩ ب) بالطريقة اللفظية؟

لو قلك : أوجد احتمال وقوع الحدث أ و ب معا

إذا كانت أ ⊃ ب فإن : ل (أ ∩ ب) = ل (أ) الصغيرة

مثال

إذا كان ل(أ) = ٠,٢ ، ل(ب) = ٠,٦ ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٧ أوجد : ل (أ ∩ ب)

الحل :

ل (أ ∩ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∪ ب)

= ٠,٢ + ٠,٦ − ٠,٧ = ٠,١

شكل فن

ف: أ = {٣}، ب = {٤ ، ٦}، أ ∩ ب = {١ ، ٢}، خارجهما ٧

أ ∩ ب = { ١ ، ٢ }

ل (أ ∩ ب) = $\frac{\text{عدد عناصر أ ∩ ب}}{\text{العدد الكلى}}$

= $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

تصميم محمود عوض – معلم رياضيات

الفرق −

إذا كان أ ، ب حدثان من فضاء العينة فإن :

ل (أ − ب) = ل (أ) − ل (أ ∩ ب)

ل (ب − أ) = ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

إذا كان أ ، ب حدثان **متنافيان** فإن :

ل (أ − ب) = ل (أ)

ملحوظة: امتى يطلب **ل (أ − ب)** بالطريقة اللفظية؟

لو قالك : أوجد احتمال وقوع الحدث أ **فقط**

أو قالك : احتمال وقوع الحدث أ وعدم وقوع الحدث ب

لو عرفت الفرق والتقاطع فإن :

ل (أ) = ل (أ − ب) + ل (أ ∩ ب)

مثال

إذا كان ل(أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل(ب) = $\frac{١}{٣}$ ، ل(أ ∩ ب) = $\frac{١}{٥}$

أوجد : ل (أ − ب) ، ل (ب − أ)

الحل :

ل (أ − ب) = ل (أ) − ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{٥}$ = $\frac{٣}{١٠}$

ل (ب − أ) = ل (ب) − ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٣}$ − $\frac{١}{٥}$ = $\frac{٢}{١٥}$

شكل فن

أ − ب : هي العناصر الموجودة في أ ومش موجودة في **ب**

ب − أ : هي العناصر الموجودة في **ب** ومش موجودة في أ

أ − ب = { ١ ، ٣ }

ل (أ − ب) = $\frac{٢}{٥}$

ب − أ = { ٤ }

ل (ب − أ) = $\frac{١}{٥}$

تصميم محمود عوض
معلم رياضيات

المكملة /

إذا كان أ ، ب حدثان من فضاء العينة فإن :

ل (أَ) = ١ − ل (أ)

ل (أ) = ١ − ل (أَ)

القاعدة العامة :

ل (أ) + ل (أَ) = ١

ملحوظة: امتى يطلب **ل (أَ)** بالطريقة اللفظية؟

لو قالك : أوجد احتمال **عدم** وقوع الحدث أ

مثال

إذا كان ل (أ) = $\frac{١}{٥}$ ، ل (ب) = $\frac{١}{٣}$ ،

أوجد : ١) ل (أَ) ٢) احتمال عدم وقوع الحدث ب

الحل :

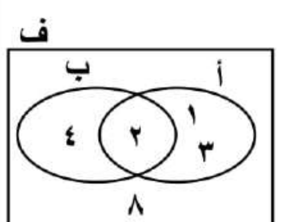
١) ل (أَ) = ١ − ل (أ) = ١ − $\frac{١}{٥}$ = $\frac{٤}{٥}$

٢) **احتمال عدم وقوع الحدث ب : يقصد به ل (بَ)**

ل (بَ) = ١ − ل (ب) = ١ − $\frac{١}{٣}$ = $\frac{٢}{٣}$

شكل فن

أَ : هي **كل** العناصر اللى قدامك **ما عدا** عناصر أ



أَ = { ٤، ٨ }

ل (أَ) = $\frac{٢}{٥}$

بَ = { ١ ، ٣ ، ٨ }

ل (بَ) = $\frac{٣}{٥}$



١ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية
وكان ل(أ) = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٦ ، ل(أ∩ب) = ٠,٢
أوجد : ل (أ ∪ ب) ، ل (أ ـ ب)

الحل

ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) – ل(أ ∩ ب)
= ٠,٣ + ٠,٦ – ٠,٢ = ٠,٧

ل (أ ـ ب) = ل (أ) – ل (أ ∩ ب)
= ٠,٣ – ٠,٢ = ٠,١

٢ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية
وكان ل(أ) = $\frac{٣}{٨}$ ، ل(ب) = $\frac{١}{٢}$ ، ل(أ∪ب) = $\frac{٥}{٨}$
أوجد : ل (أ ∩ ب) ، ل (ب – أ)

الحل

ل(أ∩ب) = ل (أ) + ل (ب) – ل (أ ∪ ب)
= $\frac{٣}{٨}$ + $\frac{١}{٢}$ – $\frac{٥}{٨}$ = $\frac{٢}{٨}$ = $\frac{١}{٤}$

ل (ب – أ) = ل (ب) – ل(أ ∩ ب)
= $\frac{١}{٢}$ – $\frac{١}{٤}$ = $\frac{١}{٤}$

٣ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية
وكان ل(أ)= ٠,٨ ، ل(ب)= ٠,٧ ، ل(أ∩ب)= ٠,٦
فأوجد: (١) احتمال عدم وقوع الحدث أ
(٢) احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل

الحل

احتمال عدم وقوع الحدث أ معناه ل (أَ)
ل (أَ) = ١ – ل (أ)
= ١ – ٠,٨ = ٠,٢

احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل معناه ل (أ ∪ ب)
ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) – ل(أ ∩ ب)
= ٠,٨ + ٠,٧ – ٠,٦ = ٠,٩

٤ إذا كان أ ، ب حدثين <u>متنافيين</u> من تجربة عشوائية
وكان ل (أ) = $\frac{١}{٣}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٧}{١٢}$
فأوجد ل (ب)

الحل

∵ أ ، ب حدثان متنافيان ∴ ل (أ ∩ ب) = صفر
∵ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب)
∴ $\frac{٧}{١٢}$ = $\frac{١}{٣}$ + ل (ب)
∴ ل (ب) = $\frac{٧}{١٢}$ – $\frac{١}{٣}$ = $\frac{٧}{١٢}$ – $\frac{٤}{١٢}$ = $\frac{٣}{١٢}$ = $\frac{١}{٤}$

٥ صندوق يحتوى على ١٢ كرة منها ٥ كرات زرقاء ، ٤ كرات حمراء وباقى الكرات بيضاء ، سحبت كرة عشوائيا فاحسب احتمال أن تكون الكرة :
(١) زرقاء (٢) ليست حمراء (٣) زرقاء أو حمراء

الحل

العدد الكلى = ١٢ ، عدد الكرات البيضاء = ٣

احتمال أن تكون زرقاء = $\frac{\text{عدد الكرات الزرقاء}}{\text{العدد الكلى}}$ = $\frac{٥}{١٢}$

احتمال ليست حمراء = $\frac{\text{عدد الكرات الزرقاء والبيضاء}}{\text{العدد الكلى}}$ = $\frac{٨}{١٢}$ = $\frac{٢}{٣}$

احتمال زرقاء أو حمراء= $\frac{\text{عدد الكرات الزرقاء والحمراء}}{\text{العدد الكلى}}$ = $\frac{٩}{١٢}$ = $\frac{٣}{٤}$

٦ إذا كان ل (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (ب) = $\frac{٢}{٣}$
، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٣}$ فأوجد : ل(أ ∪ ب) ، ل (أ ـ ب)

الحل

....
....
....
....
....
....

٧ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية

وكان ل (ب) = $\frac{١}{١٢}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{١}{٣}$

فأوجد ل(أ) إذا كان: ① أ ، ب متنافيان

② ب ⊂ أ

الحل

أولاً : إذا كان أ ، ب متنافيان :

∴ ل (أ ∩ ب) = صفر

ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب)

$\frac{١}{٣}$ = ل (أ) + $\frac{١}{١٢}$

ل(أ) = $\frac{١}{٣}$ - $\frac{١}{١٢}$ = $\frac{١}{٤}$

ثانيا : إذا كانت ب ⊂ أ :

∴ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) الاتحاد = الكبيرة

∴ ل (أ) = $\frac{١}{٣}$

٨ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية

وكان ل (أ) = ٠,٥ ، ل(أ∪ب) = ٠,٨ ، ل(ب)= س

فأوجد قيمة س إذا كان : ① أ ، ب متنافيان

② ل (أ ∩ ب) = ٠,١

الحل

أولاً : إذا كان أ ، ب حدثان متنافيان :

∴ ل (أ ∩ ب) = صفر

ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب)

٠,٨ = ٠,٥ + ل (ب)

ل (ب) = ٠,٨ – ٠,٥ = ٠,٣

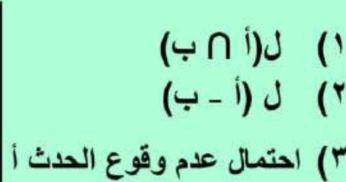
ثانيا : إذا كان ل (أ ∩ ب) = ٠,١

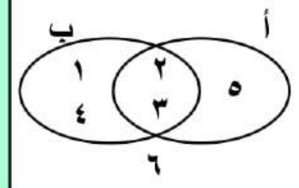
∴ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) – ل (أ ∩ ب)

٠,٨ = ٠,٥ + ل(ب) – ٠,١

ل(ب) = ٠,٨ – ٠,٤ = ٠,٤

٩ باستخدام شكل فن المقابل أوجد :





١) ل(أ ∩ ب)

٢) ل (أ - ب)

٣) احتمال عدم وقوع الحدث أ

الحل

العدد الكلى ف = ٦

١) أ ∩ ب = { ٢ ، ٣ } عدد العناصر = ٢

ل (أ ∩ ب) = $\frac{\text{عدد عناصر أ ∩ ب}}{\text{العدد الكلى}}$ = $\frac{٢}{٦}$ = $\frac{١}{٣}$

---

٢) أ – ب = { ٥ } عدد عناصره = ١

ل(أ – ب) = $\frac{\text{عدد عناصر أ - ب}}{\text{العدد الكلى}}$ = $\frac{١}{٦}$

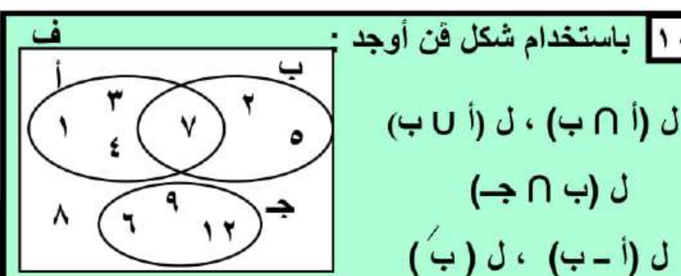
---

٣) احتمال عدم وقوع أ يقصد به ل (أ َ)

أ َ = { ١ ، ٤ ، ٦ } عدد عناصره = ٣

ل (أ َ) = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$

١٠ باستخدام شكل فن أوجد :



ل (أ ∩ ب) ، ل (أ ∪ ب)

ل (ب ∩ جـ)

ل (أ – ب) ، ل (ب َ)

الحل

انت أقوى من شكل فن

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

١ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية
وكان ل(أ) = $\frac{٤}{٩}$ ، ل(ب) = $\frac{٣}{٩}$ ، ل(أ∩ب) = $\frac{١}{٩}$
أوجد : ل (أ ∪ ب) ، ل (أ – ب)
ل (ب – أ) ، ل (أَ)

الحل

....

٢ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية
وكان ل (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل(ب) = $\frac{١}{٣}$ فأوجد ل (أ ∪ ب)
إذا كان: ① ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٨}$ ② أ، ب متنافيان

الحل

....

٣ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية
وكان ل(أ) = ٠,٤ ، ل(ب) = ٠,٥
، ل (أ ∪ ب)= ٠,٢
أوجد : ل(أ∩ب) ، ل (ب – أ)

الحل

....

٤ كيس به ٢٠ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٢٠ ، سحبت بطاقة عشوائيا ، أوجد احتمال أن تكون البطاقة تحمل عددا :
① يقبل القسمة على ٣ و يقبل القسمة على ٥
② يقبل القسمة على ٣ أو يقبل القسمة على ٥

الحل

....



اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة لتجربة عشوائية فإن ل (أ ∩ ب) = ...

أ) صفر ب) ١ جـ) ٠,٥ د) Φ

(٢) إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين فإن أ ∩ ب = ...

أ) Φ ب) صفر جـ) ٠,٥٦ د) ١

(٣) إذا كانت أ ⊂ ف لتجربة عشوائية ما وكان ل (أ) = ٢ ل (أ َ) فإن ل (أ) = ...

أ) $\frac{١}{٣}$ ب) $\frac{١}{٢}$ جـ) $\frac{٢}{٣}$ د) ١

(٤) إذا كان ل (أ) = ل (أ َ) فإن ل (أ َ) = ...

أ) صفر ب) ١ جـ) $\frac{١}{٤}$ د) $\frac{١}{٢}$

(٥) إذا كان أ ⊃ ب فإن ل (أ ∪ ب) تساوى ....

أ) صفر ب) ل (أ) جـ) ل (ب) د) ل (أ ∩ ب)

(٦) إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين وكان ل (أ) = $\frac{١}{٣}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٧}{١٢}$ فإن ل (ب) = ...

أ) $\frac{١}{٤}$ ب) $\frac{١}{٣}$ جـ) $\frac{١}{٢}$ د) ١

---

(٧) إذا كان احتمال وقوع الحدث أ هو ٦٥٪ فإن احتمال عدم وقوعه يساوى ....

أ) ٠,٣٥ ب) $\frac{١}{٣}$ جـ) ٠,٦٥ د) ١

(٨) إذا كان احتمال وقوع الحدث أ هو ٧٥٪ فإن احتمال عدم وقوعه هو ....

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $\frac{١}{٣}$ جـ) $\frac{١}{٤}$ د) ١

(٩) إذا ألقيت قطعة نقود مرة واحدة فإن احتمال ظهور صورة أو كتابة يساوى ....

أ) صفر% ب) ٢٥٪ جـ) ٥٠٪ د) ١٠٠٪

(١٠) إذا ألقى حجر نرد مرة واحدة فإن احتمال ظهور عدد زوجى وظهور عدد فردى يساوى ....

أ) صفر ب) $\frac{١}{٣}$ جـ) $\frac{٣}{٤}$ د) ١

(١١) إذا ألقى حجر نرد مرة واحدة فإن احتمال ظهور عدد أكبر من ٤ يساوى ....

أ) صفر ب) $\frac{٢}{٣}$ جـ) $\frac{١}{٣}$ د) $\frac{١}{٦}$



١) إذا كانت النسبة بين محيطى مربعين ١ : ٢ فإن النسبة بين مساحتيهما = ١ : ٤

٢) المعكوس الجمعي للكسر $\frac{٣}{س^٢ + ١}$ هو $\frac{-٣}{س^٢ + ١}$

٣) إذا كان س عددا سالبا فإن أكبر الأعداد التالية هو ٣ ـ س

أ) ٣ + س ب) ٣س جـ) ٣ ـ س د) $\frac{٣}{س}$

٤) إذا كان $أ^٢ - ب^٢ = ٢١$ ، أ + ب = ٧ فإن أ ـ ب = ٣

٥) إذا كان عمر رجل الآن س سنة فإن عمره بعد ٥ سنوات هو س + ٥ وعمره منذ ٣ سنوات هو س ـ ٣

٦) احتمال الحدث المستحيل = صفر بينما احتمال الحدث المؤكد = ١

٧) إذا كان $س^٢ - ص^٢ = ٢ (س + ص)$ فإن س ـ ص = ٢

٨) إذا كان (٥ ، س ـ ٧) = (ص + ١ ، ـ٥) فإن س + ص = ٢+٤ = ٦

٩) الدالة د حيث د(س) = $س^٦ + ٢س^٤ - ٣$ كثيرة حدود من الدرجة السادسة

١٠) إذا كان منحنى الدالة د حيث د(س) = $س^٢ - أ$ يمر بالنقطة (١ ، ٠) فإن أ = ١

١١) عددان موجبان مجموعهما ٧ ، وحاصل ضربهما ١٢ فإن العددين هما ٣ ، ٤

١٢) إذا كان ٢س = ١ فإن $\frac{١}{٥}$ س = $\frac{١}{٥} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{١٠}$

١٣) مجموعة حل المعادلة ٢س + ٤ = ٠ في ط هى ....

١٤) إذا كان المقدار $س^٢ + ك س + ٣٦$ مربعا كاملا فإن ك = ± ١٢

١٥) إذا كان $٥^{س} = ٤$ فإن $٥^{س-١} = ٥^{س} \times ٥^{-١} = ٤ \times \frac{١}{٥} = \frac{٤}{٥}$

١٦) إذا كان $٣^{س+٧} = ١$ فإن س = ـ٧

١٧) إذا كان $٣^{س} + ٣^{س} + ٣^{س} = ٣^{س} \times ٣ = ٣^{س+١}$

١٨) $\sqrt{٦٤ + ٣٦} = ٨ + ٢$

١٩) مجموعة حل المعادلة $س^٢ + ٤ = ٠$ في ح هي ....

٢٠) إذا كانت $س^٢ ص^{-٢} = ٨١$ فإن $\frac{س}{ص}$ = ...

٢١) [١ ، ٥] ∪ [ـ٢ ، ٣] = ...

تصميم محمود عوض معلم رياضيات

نهاية الجبر